Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Die Erweiterung des Helmholtzschen Prinzips von der verborgenen Bewegung und den unvollständigen Problemen auf kinetische Potentiale beliebiger Ordnung**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1921, 11


---

Das von Helmholtz für kinetische Potentiale erster Ordnung aufgestellte Prinzip der verborgenen Bewegung sowie der unvollständigen Probleme wird auf kinetische Potentiale beliebiger Ordnung ausgedehnt, und allgemein werden für beliebige Potentiale die Kriterien aufgestellt für die Existenz vollständiger Integrale mit beliebig vielen willkürlichen Konstanten. Es schließen sich hieran Beziehungen zwischen dem identischen Bestehen einer Variationsgleichung und der Möglichkeit, ein kinetisches Potential als vollständigen Differentialquotienten darzustellen.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1922/1923, S. III)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1921. 11. Abhandlung

# Die Erweiterung des HELMHOLTZschen Prinzips von der verborgenen Bewegung und den unvollständigen Problemen auf kinetische Potentiale beliebiger Ordnung

Von
LEO KOENIGSBERGER
in Heidelberg



Eingegangen am 3. Dezember 1921

Heidelberg 1921
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1680

# 1.

Bewegt sich ein Punkt vermöge einer sollizitierenden Kraft $K$ auf einer geraden Linie, deren Strecken von einem festen Anfangspunkte derselben aus gezählt mit $s$ bezeichnet werden, so wird die bei der Verrückung des Punktes um $ds$ von der Kraft geleistete Arbeit durch das Produkt $Kds$ definiert; legen wir ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde und bezeichnen unter der Voraussetzung der Zerlegbarkeit einer Kraft die nach den drei Achsen gerichteten Komponenten derselben mit $X, Y, Z$ und die dem $ds$ entsprechenden unendlich kleinen Wegstrecken mit $dx$, $dy$, $dz$, so wird die geleistete Arbeit durch $Xdx + Ydy + Zdz$ dargestellt werden. Bewegt sich nunmehr ein beliebiges freies System von $n$ Punkten $x_i, y_i, z_i$ vermöge eines Systems von Kräften, deren Komponenten $X_i, Y_i, Z_i$ sind, so wird die Gesamtarbeit des Systems für die Wegstrecken $ds_i$ durch

$$\sum_1^n{}_i \left(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i\right)$$

definiert sein. Unterwerfen wir jedoch das System beliebigen Zwangsbedingungen, so wird die Bewegung des Systems durch andre bewegende Kräfte, deren Komponenten durch $X_i'$, $Y_i'$, $Z_i'$ bezeichnet werden mögen, veranlaßt vor sich gehen, und somit die von diesen geleistete Gesamtarbeit durch

$$\sum_1^n{}_i \left(X_i' dx_i + Y_i' dy_i + Z_i' dz_i\right)$$

dargestellt sein, worin auch im allgemeinen $dx_i$, $dy_i$, $dz_i$ andere sein können als früher.

Für das erweiterte D'ALEMBERTsche Prinzip stellen wir die Forderung auf, *daß die Gesamtarbeit, welche das den Zwangsbedingungen unterworfene System leistet, gleich ist der Gesamtarbeit des freien Systems für dieselben Verrückungen und zwar für alle diejenigen, welche die Punkte des den Zwangsbedingungen unterworfenen Systems überhaupt erleiden können, also für alle virtuellen Verschiebungen $\delta x_i$, $\delta y_i$, $\delta z_i$, so daß das Prinzip in der Form dargestellt ist:*

$$\sum_1^n i \left(X_i' \delta x_i + Y_i' \delta y_i + Z_i' \delta z_i\right) = \sum_1^n i \left(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i\right).$$

Sind nun $X_i, Y_i, Z_i$ die Komponenten der gegebenen *bewegenden* und $X_i', Y_i', Z_i'$ die Komponenten der aus der Wirkung dieser und der Zwangsbedingungen hervorgehenden *beschleunigenden* Kräfte, so sollen letztere in Analogie zu dem aus der lebendigen Kraft

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_1^n i\, m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2\right)$$

mittels der Ausdrücke

$$X_i = -\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i'}, \quad Y_i = -\frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y_i'}, \quad Z_i = -\frac{\partial T}{\partial z_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial z_i'}$$

hergeleiteten Maße der Kräftekomponenten in der Form dargestellt werden:

$$X_i' = -\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i'} - \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial T}{\partial x_i''} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(\nu)}}$$

$$Y_i' = -\frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y_i'} - \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial T}{\partial y_i''} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial T}{\partial y_i^{(\nu)}}$$

$$Z_i' = -\frac{\partial T}{\partial z_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial z_i'} - \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial T}{\partial z_i''} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial T}{\partial z_i^{(\nu)}},$$

worin $T$ eine beliebige Funktion von $t, x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', \ldots x_i^{(\nu)}, y_i^{(\nu)}, z_i^{(\nu)}$ ist, und wir erhalten hiernach aus obigem *das erweiterte* D'ALEMBERT*sche Prinzip in der Form*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^n i \left\{\left(-\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i'} - \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(\nu)}}\right)\delta x_i\right. \\ &\quad + \left(-\frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y_i'} - \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial T}{\partial y_i^{(\nu)}}\right)\delta y_i \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\partial T}{\partial z_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial z_i'} - \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial T}{\partial z_i^{(\nu)}}\right)\delta z_i\right\} \\ &\quad = \sum_1^n i \left(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i\right), \end{aligned}\right.$$

*worin* $X_i, Y_i, Z_i$ *die bewegenden Kräfte des Systems bedeuten, und die Beschränkung der Freiheit des Systems durch* $m$ *in den virtuellen Verschiebungen lineare homogene Gleichungen von der Form gegeben seien:*

$$
(2)\left\{\begin{aligned}
&\sum_1^n{}_i \left(f_{1i}\,\delta x_i + \varphi_{1i}\,\delta y_i + \psi_{1i}\,\delta z_i\right) = 0\\
&\sum_1^n{}_i \left(f_{2i}\,\delta x_i + \varphi_{2i}\,\delta y_i + \psi_{2i}\,\delta z_i\right) = 0\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_1^n{}_i \left(f_{mi}\,\delta x_i + \varphi_{mi}\,\delta y_i + \psi_{mi}\,\delta z_i\right) = 0\,,
\end{aligned}\right.
$$

*in denen die Funktionen* $f_{\varkappa i}, \varphi_{\varkappa i}, \psi_{\varkappa i}$ $(\varkappa = 1, 2, \dots m)$ *von der Zeit und den Koordinaten, aber nicht von den Ableitungen derselben abhängen sollen.*

## 2.

Um aus dem D'ALEMBERTschen Prinzip die erweiterten LAGRANGEschen *Bewegungsgleichungen erster Art* herzuleiten, multipliziere man die Gleichungen (2) mit den unbestimmten Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ und addiere alle diese Gleichungen zu (1), so daß sich die in den $3n$ Variationen homogene lineare Gleichung

$$
(3)\left\{\begin{aligned}
\sum_1^n{}_i \Bigg\{ &\left(-\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i'} - \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(\nu)}} - X_i + \lambda_1 f_{1i} + \lambda_2 f_{2i} + \cdots + \lambda_m f_{mi}\right)\delta x_i\\
+ &\left(-\frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y_i'} - \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial T}{\partial y_i^{(\nu)}} - Y_i + \lambda_1 \varphi_{1i} + \lambda_2 \varphi_{2i} + \cdots + \lambda_m \varphi_{mi}\right)\delta y_i\\
+ &\left(-\frac{\partial T}{\partial z_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial z_i'} - \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial T}{\partial z_i^{(\nu)}} - Z_i + \lambda_1 \psi_{1i} + \lambda_2 \psi_{2i} + \cdots + \lambda_m \psi_{mi}\right)\delta z_i \Bigg\} = 0
\end{aligned}\right.
$$

ergibt. Unterwirft man nun die unbestimmten Multiplikatoren der Bedingung, daß die Koeffizienten von $m$ Variationen in dieser Gleichung verschwinden, so daß diese nur noch in $3n - m$ Variationen homogen linear ist, und bemerkt, daß von den $3n$ Variationen vermöge der $m$ in diesen Variationen homogenen linearen Bedingungsgleichungen (2) noch $3n-m$ Variationen voneinander unabhängig bleiben, so werden die Koeffizienten auch dieser letzteren, also die Koeffizienten aller in dieser Gleichung vorkommenden Variationen verschwinden müssen und sich *somit die* $3n$ LAGRANGE*schen Bewegungsgleichungen erster Art in der Form ergeben:*

$$(4)\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial T}{\partial x_i}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial x_i'}-\cdots+(-1)^{\nu-1}\dfrac{d^\nu}{dt^\nu}\dfrac{\partial T}{\partial x_i^{(\nu)}}-X_i+\lambda_1 f_{1i}+\cdots+\lambda_m f_{mi}=0 \\ -\dfrac{\partial T}{\partial y_i}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial y_i'}-\cdots+(-1)^{\nu-1}\dfrac{d^\nu}{dt^\nu}\dfrac{\partial T}{\partial y_i^{(\nu)}}-Y_i+\lambda_1 \varphi_{1i}+\cdots+\lambda_m \varphi_{mi}=0 \\ -\dfrac{\partial T}{\partial z_i}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial z_i'}-\cdots+(-1)^{\nu-1}\dfrac{d^\nu}{dt^\nu}\dfrac{\partial T}{\partial z_i^{(\nu)}}-Z_i+\lambda_1 \psi_{1i}+\cdots+\lambda_m \psi_{mi}=0 \\ \hfill (i=1,2,\ldots n)\,, \end{array}\right.$$

*aus denen in Verbindung mit den m Zwangsbedingungen, aus deren Variation die Gleichungen* (2) *entstanden sind, die* $3n+m$ *Größen* $x_i, y_i, z_i, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ *als Funktionen von t herzuleiten sind.*

Wir werden ferner sagen, ein Kräftesystem besitzt eine Kräftefunktion $U$ $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn eine Funktion $U$ von $t$, den Koordinaten $x_i$, $y_i$, $z_i$ und deren nach der Zeit genommenen Ableitungen bis zur $\nu^{\text{ten}}$ Ordnung hin existiert, für welche die Kräftekomponenten $X_i, Y_i, Z_i$ durch die Ausdrücke definiert sind:

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{\partial U}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial x_i'}+\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial U}{\partial x_i^{(\nu)}} \\ Y_i &= \frac{\partial U}{\partial y_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial y_i'}+\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial U}{\partial y_i^{(\nu)}} \qquad (i=1,2,\ldots n): \\ Z_i &= \frac{\partial U}{\partial z_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial z_i'}+\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial U}{\partial z_i^{(\nu)}} \end{aligned}$$

Welchen Bedingungen die $3n$ Kraftkomponenten genügen müssen, damit sie eine Kräftefunktion irgendwelcher Ordnung besitzen, soll hier nicht näher untersucht werden, ich verweise zu diesem Zwecke auf die bekannte Arbeit von KARL BOEHM[1].

[1] »Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentials höherer Ordnung« (Journal für Mathematik, Bd. 121).

Sondern wir in der Gleichung (1) die Kräfte mit den Komponenten $X_i, Y_i, Z_i$ in solche, welche von den Punkten des Systems auf eben diese ausgeübt werden, und deren Komponenten mit $'X_i, 'Y_i, 'Z_i$ bezeichnet und *innere* Kräfte genannt werden sollen, und solche, welche sonst auf die Punkte des Systems wirken, deren Komponenten mit $Q_i, R_i, S_i$ bezeichnet und *äußere* Kräfte genannt werden mögen, so wird (1) in

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^n{}_i \left\{\left(-\frac{\partial T}{\partial x_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i'}-\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(\nu)}}-{}'X_i\right)\delta x_i\right. \\ &\quad+\left(-\frac{\partial T}{\partial y_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y_i'}-\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial T}{\partial y_i^{(\nu)}}-{}'Y_i\right)\delta y_i \\ &\quad\left.+\left(-\frac{\partial T}{\partial z_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial z_i'}-\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial T}{\partial z_i^{(\nu)}}-{}'Z_i\right)\delta z_i\right\} \\ &\quad=\sum_1^n{}_i\left(Q_i\,\delta x_i+R_i\,\delta y_i+S_i\,\delta z_i\right), \end{aligned}\right.$$

und unter der Annahme, daß die innern Kräfte eine Kräftefunktion $U$ besitzen, wenn $T+U=-H$ gesetzt wird, in

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^n{}_i \left\{\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i'}+\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(\nu)}}\right)\delta x_i\right. \\ &\quad+\left(\frac{\partial H}{\partial y_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y_i'}+\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial y_i^{(\nu)}}\right)\delta y_i \\ &\quad\left.+\left(\frac{\partial H}{\partial z_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z_i'}+\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial z_i^{(\nu)}}\right)\delta z_i\right\} \\ &\quad=\sum_1^n{}_i\left(Q_i\,\delta x_i+R_i\,\delta y_i+S_i\,\delta z_i\right) \end{aligned}\right.$$

übergehen, worin die von $t, x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', \ldots x_i^{(\nu)}, y_i^{(\nu)}, z_i^{(\nu)}$ abhängige Funktion *H ein kinetisches Potential* $\nu^{\text{ter}}$ *Ordnung* genannt wird.

Um hieraus die erweiterten LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen zweiter Art herzuleiten, denken wir uns die $3n$ Koordinaten $x_i, y_i, z_i$ der Systempunkte mit Hilfe der $m$ Zwangsgleichungen des Systems durch $3n-m=\mu$ freie Parameter in der Form ausgedrückt

$$x_i=\alpha_i(t,p_1,p_2,\dots p_\mu),\quad y_i=\beta_i(t,p_1,p_2,\dots p_\mu),\quad z_i=\gamma_i(t,p_1,p_2,\dots p_\mu),$$

so daß die Variationen $\delta p_1, \delta p_2, \dots \delta p_\mu$ voneinander unabhängig sind, und daher eine lineare homogene Gleichung in diesen erfordert, daß deren Koeffizienten einzeln verschwinden. Nun ist, wenn man hiernach die Koordinaten als Funktionen von $t$ und der Parameter auffaßt, unter der Bedingung, daß die Variationen der Parameter nebst deren nach $t$ bis zur $\nu^{\text{ten}}$ Ordnung hin genommenen Ableitungen in $t_0$ und $t_1$ verschwinden,

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_0}^{t_1} H\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_1^n{}_i \Bigg\{ &\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i'}+\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(\nu)}}\right)\\ &\qquad\times\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_1}\,\delta p_1+\frac{\partial x_i}{\partial p_2}\,\delta p_2+\cdots+\frac{\partial x_i}{\partial p_\mu}\,\delta p_\mu\right)\\ &+\left(\frac{\partial H}{\partial y_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y_i'}+\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial y_i^{(\nu)}}\right)\\ &\qquad\times\left(\frac{\partial y_i}{\partial p_1}\,\delta p_1+\frac{\partial y_i}{\partial p_2}\,\delta p_2+\cdots+\frac{\partial y_i}{\partial p_\mu}\,\delta p_\mu\right)\\ &+\left(\frac{\partial H}{\partial z_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z_i'}+\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial z_i^{(\nu)}}\right)\\ &\qquad\times\left(\frac{\partial z_i}{\partial p_1}\,\delta p_1+\frac{\partial z_i}{\partial p_2}\,\delta p_2+\cdots+\frac{\partial z_i}{\partial p_\mu}\,\delta p_\mu\right)\Bigg\}\,dt\,;\end{aligned}$$

anderseits aber auch, wenn man die Werte der Koordinaten und deren Ableitungen in $H$ einsetzt, so daß dieses nur von $t, p_1, p_2, \dots p_\mu$ und deren nach $t$ genommenen Ableitungen abhängt,

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} H\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_1^\mu{}_i\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_i'}+\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_i^{(\nu)}}\right)\delta p_i\,,$$

und somit durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $\delta p_s$ in den beiden letzten Gleichungen

$$\sum_1^n i \Bigg\{ \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_i'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial x_i^{(\nu)}} \right) \frac{\partial x_i}{\partial p_s}$$

$$+ \left( \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial y_i'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial y_i^{(\nu)}} \right) \frac{\partial y_i}{\partial p_s}$$

$$+ \left( \frac{\partial H}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial z_i'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial z_i^{(\nu)}} \right) \frac{\partial z_i}{\partial p_s} \Bigg\}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu),$$

und somit ergeben sich aus den drei letzten Gleichungen durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $\delta p_s$ *die nachfolgenden* LAGRANGE*schen Bewegungsgleichungen der* $2^{\text{ten}}$ *Art:*

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} = \sum_1^n i \left( Q_i \frac{\partial x_i}{\partial p_s} + R_i \frac{\partial y_i}{\partial p_s} + S_i \frac{\partial z_i}{\partial p_s} \right)$$
$$(s = 1, 2, \ldots \mu),$$

*oder wenn man mit $P_s$ die auf Veränderung des Parameters $p_s$ wirkende Außenkraft bezeichnet:*

$$(7) \qquad \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} = P_s \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu),$$

*welche ein System von $\mu$ totalen Differentialgleichungen mit den abhängigen Variabeln $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ und der unabhängigen Variabeln $t$ bilden.*

Wir schließen an diese Form der Bewegungsgleichungen einen Hilfssatz, den wir später in dieser Beweisform für die Theorie der verborgenen Bewegung brauchen werden. Sei $H$ eine Funktion von

$$t, p_1, p_2, \cdots p_\mu, p_1', p_2', \cdots p_\mu', \cdots p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \cdots p_\mu^{(\nu)},$$

welche der vollständige nach $t$ genommene Differentialquotient einer Funktion $f$ von $t, p_1, \ldots p_\mu, \ldots p_1^{(\nu-1)}, \ldots p_\mu^{(\nu-1}$ ist, so wird

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} H\,dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} f\left(t, p_1, \ldots p_\mu, \ldots p_1^{(\nu-1)}, \ldots p_\mu^{(\nu-1)}\right) dt$$

$$= \delta \left\{ f\left(t, p_1, \ldots p_\mu, \ldots p_1^{(\nu-1)}, \ldots p_\mu^{(\nu-1)}\right)_{t_1} - f\left(t, p_1, \ldots p_\mu, \ldots p_1^{(\nu-1)}, \ldots p_\mu^{(\nu-1)}\right)_{t_0} \right\}$$

den Wert Null annehmen, wenn die Bedingung gestellt wird, daß die Variationen von $p_1, \ldots p_\mu, \ldots p_1^{(\nu-1)}, \ldots p_\mu^{(\nu-1)}$ für $t = t_1$ und $t = t_0$ verschwinden, und es wird somit, da

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} H\,dt = \sum_1^n{}_i \Bigg\{ & \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial p_i'} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_i''} + \cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial H}{\partial p_i^{(\nu)}} \right) \delta p_i \right]_{t_0}^{t_1} \\ & + \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial p_i''} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_i'''} + \cdots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}} \frac{\partial H}{\partial p_i^{(\nu)}} \right) \delta p_i' \right]_{t_0}^{t_1} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \left[ \frac{\partial H}{\partial p_i^{(\nu)}} \delta p_i^{(\nu-1)} \right]_{t_0}^{t_1} \Bigg\} \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^\mu{}_i \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_i'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_i^{(\nu)}} \right) \delta p_i\, dt\,, \end{aligned}$$

und die Variationen $\delta p_1, \delta p_2, \ldots \delta p_\mu$ voneinander unabhängig sind:

$$(8) \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_i'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_i^{(\nu)}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

sein, und *diese identische Beziehung ist somit die notwendige Bedingung dafür, daß $H$ durch den nach $t$ genommenen Differentialquotienten einer Funktion von $t, p_1, \ldots p_1^{(\nu-1)}, \ldots p_\mu, \ldots p_\mu^{(\nu-1)}$ dargestellt werden kann.*

Erfüllt umgekehrt $H$ die Gleichungen (8) identisch für beliebige Funktionen $p_1, p_2, \cdots p_\mu$ von $t$, so wird sich zeigen lassen, daß es der vollständige nach $t$ genommene Differentialquotient einer Funktion von $t, p_1, \cdots p_\mu, \cdots p_1^{(\nu-1)}, \ldots p_\mu^{(\nu-1)}$ ist. Sei im einfachsten Falle $\mu = 1$, $\nu = 1$ und $H$ eine Funktion von $t, p, p'$, welche der Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'} = \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p' \partial t} - \frac{\partial^2 H}{\partial p' \partial p} p' - \frac{\partial^2 H}{\partial p'^2} p'' = 0$$

identisch genügt, so wird $\partial^2 H / \partial p'^2 = 0$ sein müssen, und somit $H = H_1(t, p)\, p' + H_2(t, p)$ diese Gleichung in

$$\frac{\partial H_1}{\partial p} p' + \frac{\partial H_2}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{\partial H_1}{\partial p} p' = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial H_2}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial t} = 0$$

überführen, woraus unmittelbar folgt, daß $H$ der vollständige Differentialquotient einer Funktion von $t$ und $p$ ist.

In dem Falle, daß $H$ eine Funktion von $t$, $p$, $p'$, $p''$ ist, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p''} = \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p' \partial t} - \frac{\partial^2 H}{\partial p' \partial p} p' - \frac{\partial^2 H}{\partial p'^2} p'' - \frac{\partial^2 H}{\partial p' \partial p''} p'''$$
$$+ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p'' \partial t} + \frac{\partial^2 H}{\partial p'' \partial p} p' + \frac{\partial^2 H}{\partial p'' \partial p'} p'' + \frac{\partial^2 H}{\partial p''^2} p'''\right) = 0$$

identisch genügt, folgt zunächst, daß der Koeffizient von $p''''$ $\partial^2 H / \partial p''^2 = 0$, also

$$H = W_1(t, p, p')\, p'' + W_2(t, p, p')$$

die Gleichung

$$\frac{\partial W_1}{\partial p} p'' + \frac{\partial W_2}{\partial p} - p'' \frac{\partial^2 W_1}{\partial p' \partial t} - \frac{\partial^2 W_2}{\partial p' \partial t} - p'\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial p' \partial p} p'' + \frac{\partial^2 W_2}{\partial p' \partial p}\right)$$
$$- p''\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial p'^2} p'' + \frac{\partial^2 W_2}{\partial p'^2}\right) + \frac{\partial^2 W_1}{dt^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial t \partial p} p' + \frac{\partial^2 W_1}{\partial t \partial p'} p'' + \frac{\partial W_1}{\partial p} p''$$
$$+ p'\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial t \partial p} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial p^2} p' + \frac{\partial^2 W_1}{\partial p \partial p'} p''\right) + p''\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial p' \partial t} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial p' \partial p} p' + \frac{\partial^2 W_1}{\partial p'^2} p''\right) = 0$$

identisch befriedigt, oder daß $W_1$ und $W_2$ den beiden Gleichungen

$$(9)\left\{\begin{aligned} &2\frac{\partial W_1}{\partial p} + p' \frac{\partial^2 W_1}{\partial p \partial p'} - \frac{\partial^2 W_2}{\partial p'^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial t \partial p'} = 0, \\ &\frac{\partial W_2}{\partial p} - \frac{\partial^2 W_2}{\partial t \partial p'} - p' \frac{\partial^2 W_2}{\partial p \partial p'} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + 2p' \frac{\partial^2 W_1}{\partial t \partial p} + p'^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial p^2} = 0 \end{aligned}\right.$$

identisch genügen, und es wird umgekehrt, wenn $W_1$ und $W_2$ Funktionen von $t, p, p'$ sind, welche diesen beiden Gleichungen identisch genügen, $H = W_1 p'' + W_2$ die oben für $H$ geforderte Differentialgleichung identisch befriedigen. Es bleibt somit nur noch zu zeigen, daß, wenn $W_1 p'' + W_2$ ein vollständiger Differentialquotient einer Funktion

$$\varphi(t, p, p') \quad \text{oder} \quad W_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial p'}, \; W_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} p'$$

ist, für eine beliebige Funktion $\varphi$ den Gleichungen (8) identisch genügt wird, was sich durch Substitution der Werte von $W_1$ und $W_2$ in der Tat unmittelbar ergibt, so daß $H = W_1 p'' + W_2$ sich als vollständiger Differentialquotient darstellt.

So folgt durch genau dieselbe Beweisform allgemein,

*daß, wenn $H$ sich als ein nach $t$ genommener Differentialquotient einer Funktion von $t, p_1, p_2, \ldots p_\mu$ und den nach $t$ genommenen Ableitungen der Parameter darstellen läßt, dieser Ausdruck die Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu)$$

*identisch befriedigt, und daß umgekehrt jede Funktion $H$ von $t$, den Parametern und deren Differentialquotienten nach $t$, welche dieser Differentialgleichung identisch genügt, der nach $t$ genommene Differentialquotient einer Funktion von $t$ und den Parametern ist.*

### 3.

Unter der Annahme, daß in den LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen 2ter Art (7) das kinetische Potential $H$ von den Parametern $p_1, p_2, \ldots p_\varrho$ und deren Ableitungen bis zur $\nu - 1^{\text{ten}}$ Ordnung unabhängig sei, und daß ferner die auf diese Parameter wirkenden Außenkräfte $P_1, P_2, \ldots P_\varrho$ Null seien, werden, wenn die übrigen Parameter mit $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\sigma$ bezeichnet werden, so daß $\varrho + \sigma = \mu$ ist, die Bewegungsgleichungen durch die Differentialgleichungen dargestellt sein:

$$(10)\qquad \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_r'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_r^{(\nu)}} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots \varrho)$$

$$(11)\qquad \frac{\partial H}{\partial \pi_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \pi_s'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\nu)}} = \Pi_s \qquad (s = 1, 2, \ldots \sigma),$$

worin $\partial H/\partial p_r = 0$, $\partial H/\partial p_r' = 0$, $\ldots$ $\partial H/\partial p_r^{(\nu-1)} = 0$ für $r = 1, 2, \ldots \varrho$, und es gehen somit die Gleichungen (10) in

$$(10\text{a})\ \left\{\begin{aligned} &\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_r^{(\nu)}} = 0 \quad \text{oder} \\ &\frac{\partial H}{\partial p_r^{(\nu)}} = c_{0r} + c_{1r}\,t + c_{2r}\,t^2 + \cdots + c_{\nu-1\,r}\,t^{\nu-1} = f_r(t) \qquad (r = 1, 2, \ldots \varrho) \end{aligned}\right.$$

über, worin die $c$ Integrationskonstanten sind, so daß man hieraus $p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \ldots p_\varrho^{(\nu)}$ als Funktionen von $t, \pi_s, \pi_s', \ldots \pi_s^{(\nu)}$ für $s = 1, 2, \ldots \sigma$ ausdrücken und in (11) substituieren kann, genau so, wie Helmholtz für kinetische Potentiale $1^{\text{ter}}$ Ordnung bei Begründung seines Prinzips der verborgenen Bewegung in der Theorie der monozyklischen Systeme verfährt, nur daß in diesem Falle die Funktionen $f_r(t)$ in Konstanten übergehen. Allgemein ergeben sich also durch Ausführung der bezeichneten Substitution für $p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \ldots p_\varrho^{(\nu)}$ in (11) in bekannter Substitutionsbezeichnung die Gleichungen

$$(12)\quad \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s}\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \pi_s'}\right) + \left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial \pi_s''}\right) - \cdots + (-1)^\nu \left(\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\nu)}}\right) = \Pi_s$$
$$(s = 1, 2, \ldots \sigma).$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial (H)}{\partial \pi_s^{(\lambda)}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\lambda)}}\right) + \sum_1^\varrho {}_r \left(\frac{\partial H}{\partial p_r^{(\nu)}}\right)\frac{\partial (p_r^{(\nu)})}{\partial \pi_s^{(\lambda)}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\lambda)}}\right) + \sum_1^\varrho {}_r f_r(t)\,\frac{\partial (p_r^{(\nu)})}{\partial \pi_s^{(\lambda)}}$$

und somit

$$\frac{d^\lambda}{dt^\lambda}\frac{\partial (H)}{\partial \pi_s^{(\lambda)}} = \frac{d^\lambda}{dt^\lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\lambda)}}\right) + \frac{d^\lambda}{dt^\lambda}\sum_1^\varrho {}_r f_r(t)\,\frac{\partial (p_r^{(\nu)})}{\partial \pi_s^{(\lambda)}} \qquad (s = 1, 2, \ldots \sigma),$$

und daher für $\lambda = 1, 2, \ldots \nu$ und die Summe all der so entstehenden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s'}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s''}\right) - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\nu)}}\right)$$

$$= \frac{\partial (H)}{\partial \pi_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial (H)}{\partial \pi_s'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial (H)}{\partial \pi_s^{(\nu)}} - \sum_1^\varrho f_r(t)\frac{\partial (p_r^{(\nu)})}{\partial \pi_s}$$

$$+ \frac{d}{dt}\sum_1^\varrho f_r(t)\frac{\partial (p_r^{(\nu)})}{\partial \pi_s'} - \cdots - (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\sum_1^\varrho f_r(t)\frac{\partial (p_r^{(\nu)})}{\partial \pi_s^{(\nu)}},$$

so daß, wenn die durch Herleitung der Werte von $p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \ldots p_\varrho^{(\nu)}$ aus (10a) gefundenen Größen mit

$$p_1^{(\nu)} = \omega_1(t, \pi_s, \pi_s', \ldots \pi_s^{(\nu)}), \ldots p_\varrho^{(\nu)} = \omega_\varrho(t, \pi_s, \pi_s', \ldots \pi_s^{(\nu)})$$

bezeichnet und

$$\mathfrak{H} = (H)_\omega - \sum_1^\varrho f_r(t)\,\omega_r \tag{13}$$

gesetzt wird, worin $\mathfrak{H}$ wiederum ein kinetisches Potential $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung ist, das Differentialgleichungssystem (11) in

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi_s'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi_s^{(\nu)}} = \Pi_s \qquad (s = 1, 2, \ldots \sigma) \tag{14}$$

übergeht. Wir finden somit:

*Sind unter den $\varrho + \sigma$* LAGRANGE*schen Differentialgleichungen $2^{\text{ter}}$ Art $\varrho$ Bewegungsgleichungen vorhanden, in denen die $\varrho$ Parameter $p_1, p_2, \ldots p_\varrho$ nebst ihren nach $t$ genommenen Ableitungen bis zur $\nu - 1^{\text{ten}}$ Ordnung hin nicht vorkommen, so kann man durch Berechnung von $p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \ldots p_\varrho^{(\nu)}$ aus diesen als Funktionen von $t, \pi_s, \pi_s', \ldots \pi_s^{(\nu)}$ und Substitution dieser Werte in die übrigen $\sigma$ Differentialgleichungen das Differentialgleichungssystem (10), (11) ersetzen durch die $\sigma$ Differentialgleichungen (14), in denen das durch die Gleichung (13) definierte kinetische Potential $\mathfrak{H}$ wieder $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung und von $t, \pi_s, \pi_s', \ldots \pi_s^{(\nu)}$ abhängig ist, $f_r(t)$ eine ganze Funktion $\nu - 1^{\text{ten}}$ Grades ist von $t$ mit beliebigen konstanten Koeffizienten, und $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varrho$ die als Funktionen von $t, \pi_s, \pi_s', \ldots \pi_s^{(\nu)}$ sich ergebenden Ausdrücke sind, welche sich durch Berechnung der Größen $p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \ldots p_\varrho^{(\nu)}$ aus den $\varrho$ ersten Differentialgleichungen ergaben.*

*Dies ist zunächst die unmittelbar sich ergebende Erweiterung des* HELMHOLTZ*schen Satzes von der verborgenen Bewegung für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung.*

Bevor wir das Problem der Elimination der Variabeln zwischen den LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen, wovon das erweiterte Prinzip der verborgenen Bewegung ein spezieller Fall war, ganz allgemein angreifen, soll hier noch das, was HELMHOLTZ über *unvollständige Probleme* für ein kinetisches Potential $1^{\text{ter}}$ Ordnung bemerkt hat, auf solche beliebiger Ordnung erweitert werden. Wir stellen zunächst den HELMHOLTZschen Fall in etwas andrer Form dar. Sei für ein kinetisches Potential $1^{\text{ter}}$ Ordnung $H$ das LAGRANGEsche Differentialgleichungssystem gegeben:

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_r'} = P_r \; (r=1,2,\ldots\varrho), \quad \frac{\partial H}{\partial \pi_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \pi_s'} = \Pi_s \; (s=1,2,\ldots\sigma),$$

worin $H$ eine Funktion von $t, p_1, \ldots p_\varrho, p_1', \ldots p_\varrho', \pi_1, \ldots \pi_\sigma, \pi_1', \ldots \pi_\sigma'$ ist, und werde angenommen, daß ein Integralsystem existiert, in welchem $p_1, p_2, \ldots p_\varrho$ konstant sind, so ist ersichtlich, daß man *nur* für $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\sigma$ eine andre LAGRANGEsche Differentialgleichung mit einem kinetischen Potential $\mathfrak{H}$ ebenfalls von der $1^{\text{ten}}$ Ordnung aufstellen kann oder daß das Eliminationsresultat der Variabeln $p_1, \ldots p_\varrho$ zwischen jenen Gleichungen für die Variabeln $\pi_1, \ldots \pi_\sigma$ wieder zu einem solchen Potential führen wird, wenn die Koeffizienten von $p_r'$ in der Funktion $H$ nur von $p_1, p_2, \ldots p_\varrho$ abhängen. Setzt man nämlich in die obigen Differentialgleichungen das der Voraussetzung nach existierende Integralsystem ein, in welchem $p_1, \ldots p_\varrho$ Konstanten sind, die Ableitungen derselben also verschwinden, und nimmt an, daß die Koeffizienten von $p_r'$ in der Funktion $H$ nur von $p_1, \ldots p_\varrho$ abhängen, daß also

$$\begin{aligned} H = {} & \varphi_0(t, p_r, \pi_s, \pi_s') + p_1'\varphi_1(p_1, \ldots p_\varrho) + \cdots p_\varrho'\varphi_\varrho(p_1, \ldots p_\varrho) \\ & + p_1'^2\varphi_{11}(t, p_1, \ldots p_\varrho, \pi_1, \ldots \pi_s) + p_1'p_2'\varphi_{12}(t, p_1, \ldots p_\varrho, \pi_1, \ldots \pi_s) + \cdots \end{aligned}$$

ist, wo die rechte Seite von dem ersten Posten abgesehen, die $p_r'$ mindestens in der ersten Dimension enthält, so wird

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_r'}\right) = 0$$

sein, da es in jedem Posten die Ableitungen von $p_1, \dots p_\varrho$ einschließt, welche für die konstanten $p_r$ sämtlich verschwinden. Da nun bei Substitution dieses Integralsystems das erste LAGRANGEsche Differentialgleichungssystem in $(\partial H / \partial p_r) = (P_r)$ übergeht, so können aus demselben die Werte von $p_1, \dots p_r$ als Funktionen von $t, \pi_1, \dots \pi_\sigma, \pi_1', \dots \pi_\sigma'$ in der Form hergeleitet werden:

$$p_r = \omega_r\left(t, \pi_1, \dots \pi_\sigma, \pi_1', \dots \pi_\sigma'\right),$$

und werden, in das auf die $\pi$ bezügliche Differentialgleichungssystem eingesetzt, für dieses die Gleichungen ergeben:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s'}\right) = \Pi_s \qquad (s=1,2,\dots\sigma).$$

Nun ist aber wieder wie früher

$$\frac{\partial (H)}{\partial \pi_s} = \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s}\right) + \sum_1^\varrho{}_r \left(\frac{\partial H}{\partial p_r}\right)\frac{\partial \omega_r}{\partial \pi_s} = \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s}\right) + \sum_1^\varrho{}_r (P_r)\frac{\partial \omega_r}{\partial \pi_s}$$

$$\frac{\partial (H)}{\partial \pi_s'} = \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s'}\right) + \sum_1^\varrho{}_r \left(\frac{\partial H}{\partial p_r}\right)\frac{\partial \omega_r}{\partial \pi_s'} = \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s'}\right) + \sum_1^\varrho{}_r (P_r)\frac{\partial \omega_r}{\partial \pi_s'},$$

und es geht somit das auf die $\pi_s$ bezügliche LAGRANGEsche System über in

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi_s'} = \Pi_s \qquad (s=1,2,\dots\sigma),$$

wenn $(H) - \sum_1^\varrho{}_r (P_r)\,\omega_r = \mathfrak{H}$ gesetzt wird, und $\mathfrak{H}$ wiederum ein kinetisches Potential 1[ter] Ordnung ist. Wir finden somit – wenn auch auf anderm Wege – den für kinetische Potentiale 1[ter] Ordnung von HELMHOLTZ ausgesprochenen Satz über unvollständige Probleme:

*Sind unter den durch $\varrho + \sigma$ LAGRANGEsche Gleichungen definierten Bewegungen eines Systems solche möglich, für welche $p_1, p_2, \dots p_\varrho$ Konstanten sind, und besitzt das kinetische Potential 1[ter] Ordnung $H$ die Eigenschaft, daß die Glieder, in welchen $p_1', p_2', \dots p_\varrho'$ linear* *vorkommen. Koeffizienten besitzen, welche nur noch von* $p_1, p_2, \ldots p_\varrho$ *abhängen – nicht von* $t$, $\pi_s$, $\pi_s'$ *– so wird man, wenn in den ersten* $\varrho$ *Gleichungen* $p_r' = p_r'' = 0$ *gesetzt und die* $p_1, p_2, \ldots p_\varrho$ *aus diesen durch* $t, \pi_1, \ldots \pi_\sigma, \pi_1', \ldots \pi_\sigma'$ *ausgedrückt in die* $\sigma$ *Bewegungsgleichungen substituiert werden, wiederum* $\sigma$ LAGRANGEsche *Gleichungen mit einem kinetischen Potential* 1ter *Ordnung erhalten, das, wenn* $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varrho$ *die substituierten Werte sind, durch*

$$\mathfrak{H} = (H) - \sum_1^\varrho (P_r)\,\omega_r$$

*ausgedrückt ist.*

Auf diesem Wege können wir aber das HELMHOLTZsche *unvollständige* Problem auf kinetische Potentiale beliebiger Ordnung ausdehnen. *Sei die Bewegung eines Systems von Punkten durch ein allgemeines kinetisches Potential* $\nu^{\text{ter}}$ *Ordnung* $H$ *bestimmt, und werde angenommen, daß diese Bewegung so beschaffen sei, daß die Parameter* $p_r$ *konstant bleiben, die nach der Zeit genommenen Ableitungen derselben also beständig den Wert Null haben, so soll die durch die* LAGRANGE*schen Gleichungen*

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_r'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_r^{(\nu)}} = P_r \qquad (r = 1, 2, \ldots \varrho)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \pi_s'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}} = \Pi_s \qquad (s = 1, 2, \ldots \sigma)$$

*definierte Bewegung durch eine nur die* $\sigma$ *Variabeln* $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\sigma$ *enthaltende* LAGRANGE*sche Differentialgleichung beschrieben, oder die Elimination der Variabeln* $p$ *zwischen diesen Gleichungen bewerkstelligt werden, und zwar soll das Eliminationsresultat von der Form sein*

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi_s'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi_s^{(\nu)}} = \Pi_s \qquad (s = 1, 2, \ldots \sigma),$$

*worin* $\mathfrak{H}$ *wiederum ein kinetisches Potential* $\nu^{\text{ter}}$ *Ordnung in den Variabeln* $\pi_s, \pi_s', \ldots \pi_s^{(\nu)}$ ist. Sei nämlich das kinetische Potential $H$ nach Potenzen von $p_\alpha^{(\lambda)}$ geordnet, worin $\lambda$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots \nu$ ist,

$$H = f_0\left(t, p_r, p_r', \dots p_r^{(\nu)}, \pi_s, \pi_s', \dots \pi_s^{(\nu)}\right) + p_a^{(\lambda)} f_1\left(t, p_r, \dots p_r^{(\nu)}, \pi_s, \dots \pi_s^{(\nu)}\right)$$
$$+ p_a^{(\lambda)2} f_2\left(t, p_r, \dots p_r^{(\nu)}, \pi_s, \dots \pi_s^{(\nu)}\right) + \cdots,$$

worin $p_a^{(\lambda)}$ in den Funktionen $f_0, f_1, \dots$ nicht mehr vorkommt, so ist

$$\frac{\partial H}{\partial p_a^{(\lambda)}} = f_1\left(t, p_r, \dots p_r^{(\nu)}, \pi_s, \dots \pi_s^{(\nu)}\right) + 2 p_a^{(\lambda)} f_2\left(t, p_r, \dots p_r^{(\nu)}, \pi_s, \dots \pi_s^{(\nu)}\right)$$
$$+ \cdots,$$

und daher für konstante Werte von $p_1 = c_1,\ p_2 = c_2, \dots p_\varrho = c_\varrho$:

$$\left(\frac{d^\lambda}{dt^\lambda} \frac{\partial H}{\partial p_a^{(\lambda)}}\right)_{p_r = c_r} = 0 \qquad \text{für } \lambda = 1, 2, \dots \nu,$$

so daß durch Substitution des Integralsystems $p_r = c_r, \pi_s, \dots \pi_s^{(\nu)}$ in die erste der beiden LAGRANGEschen Gleichungen, wenn noch angenommen wird, daß $f_1$ die Größe $t$ nicht enthält, sich

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_r}\right)_{p_r = c_r} = (P_r) \qquad (r = 1, 2, \dots \varrho)$$

ergibt. Setzt man die hieraus hervorgehenden Werte von $p_r = c_r$ als Funktionen von $\pi_s, \dots \pi_s^{(\nu)}$ in der Form ausgedrückt $p_r = \omega_r\left(t, \pi_s, \dots \pi_s^{(\nu)}\right)$ in die zweite LAGRANGEsche Gleichung ein, in welcher außer den Variabeln $t, \pi_s, \dots \pi_s^{(\nu)}$ nur $p_r = c_r$ vorkommt, so geht diese in

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s}\right)_{\omega_r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s'}\right)_{\omega_r} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\nu)}}\right)_{\omega_r} = (\Pi_s) \qquad (s = 1, 2, \dots \sigma)$$

über; oder, da

$$\frac{\partial (H)_{\omega_r}}{\partial \pi_s^{(\lambda)}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\lambda)}}\right)_{\omega_r} + \sum_1^\varrho {}_a \left(\frac{\partial H}{\partial p_a}\right)_{\omega_r} \frac{\partial p_a}{\partial \pi_s^{(\lambda)}}$$
$$= \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\lambda)}}\right)_{\omega_r} + \sum_1^\varrho {}_a \left(P_a \frac{\partial p_a}{\partial \pi_s^{(\lambda)}}\right)_{\omega_r}$$

ist, in:

$$\frac{\partial(H)_{\omega_r}}{\partial \pi_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(H)_{\omega_r}}{\partial \pi_s'} + \cdots$$

$$+ (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial(H)_{\omega_r}}{\partial \pi_s^{(\nu)}} - \sum_1^{\varrho}{}_{\alpha} \left(P_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial \pi_s}\right)_{\omega_r} + \sum_1^{\varrho}{}_{\alpha} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(P_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial \pi_s}\right)}{\partial \pi_s'}\right)_{\omega_r} - \cdots$$

$$= (\Pi_s)_{\omega_r},$$

so daß, wenn

$$\mathfrak{H} = (H)_{\omega_r} - \sum_1^{\varrho}{}_{\alpha} (P_\alpha)\,\omega_\alpha$$

gesetzt wird, die zweiten LAGRANGEschen Gleichungen in die oben verlangte Form in dem kinetischen Potential $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{H}$ in $\pi_s, \pi_s', \ldots \pi_s^{(\nu)}$ übergehen.

Zur Erweiterung des HELMHOLTZschen Grundgedankens für die Entwicklung der verborgenen Bewegung gehen wir von den Differentialgleichungen aus:

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_r'} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{15}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \pi_s'} = \Pi_s \qquad (s = 1, 2, \ldots \sigma), \tag{16}$$

worin $H$ ein kinetisches Potential $1^{\text{ter}}$ Ordnung ist, und verlangen, daß die Gleichungen (15) vollständige nach $t$ genommene Differentialquotienten seien, also

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_r'} = \frac{d}{dt} K_r\left(t, p_1, p_1', \ldots p_\varrho', \pi_1, \pi_1', \ldots \pi_\sigma'\right) \quad (r = 1, 2, \ldots \varrho);$$

worin, da die linke Seite nur die erste und zweite Ableitung der Variabeln enthält, $K_r$ nur von den eingeschlossenen Größen abhängt. Da aber aus

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{d}{dt}\left(K_r + \frac{\partial H}{\partial p_r'}\right) \tag{17}$$

folgt, daß $K_r + \partial H/\partial p'_r$ nur die Größen $t, p_1, \dots p_\varrho, \pi_1, \dots \pi_\sigma$ einschließt, so muß $\partial H/\partial p_r$ in $p'_1, \dots p'_\varrho, \pi'_1, \dots \pi'_\sigma$ linear sein, und es müssen die Beziehungen bestehen:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = f_{11}(t, p, \pi)\, p'_1 + \cdots f_{1\varrho}(t, p, \pi)\, p'_\varrho + \varphi_{11}(t, p, \pi)\, \pi'_1 + \cdots$$
$$+ \varphi_{1\sigma}(t, p, \pi)\, \pi'_\sigma + \psi_1(t, p, \pi),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_\varrho} = f_{\varrho 1}(t, p, \pi)\, p'_1 + \cdots f_{\varrho\varrho}(t, p, \pi)\, p'_\varrho + \varphi_{\varrho 1}(t, p, \pi)\, \pi'_1 + \cdots$$
$$+ \varphi_{\varrho\sigma}(t, p, \pi)\, \pi'_\sigma + \psi_\varrho(t, p, \pi)$$

oder unter der Annahme, daß das kinetische Potential $H$, also auch die LAGRANGEschen Gleichungen (15) und (16), nicht von $p_1, p_2, \dots p_\varrho$, sondern nur von deren Ableitungen abhängen,

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = f_{11}(t, \pi)\, p'_1 + \cdots f_{1\varrho}(t, \pi)\, p'_\varrho + \varphi_{11}(t, \pi)\, \pi'_1 + \cdots$$
$$+ \varphi_{1\sigma}(t, \pi)\, \pi'_\sigma + \psi_1(t, \pi)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_\varrho} = f_{\varrho 1}(t, \pi)\, p'_1 + \cdots f_{\varrho\varrho}(t, \pi)\, p'_\varrho + \varphi_{11}(t, \pi)\, \pi'_1 + \cdots$$
$$+ \varphi_{\varrho\sigma}(t, \pi)\, \pi'_\sigma + \psi_\varrho(t, \pi).$$

Zu diesen Beziehungen aber, denen das kinetische Potential unterliegen muß, damit die linken Seiten des Differentialgleichungssystems (15) vollständige nach $t$ genommene Differentialquotienten sind, sollen jetzt des Folgenden wegen die Bedingungen hinzutreten, daß die Funktion $H$ selbst die Parameter $p_1, p_2, \dots p_\varrho$ nicht enthält, so daß $\partial H/\partial p_1, \dots \partial H/\partial p_\varrho$ identisch Null sind. Dann wird nach (17):

$$K_r + \frac{\partial H}{\partial p'_r} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial H}{\partial p'_r} = -K_r \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_r} = \frac{dK_r}{dt}$$
$$(r = 1, 2, \dots \varrho),$$

so daß die Differentialgleichungen (15) in

$$K_r = -c_r \quad \text{oder} \quad \frac{\partial H}{\partial p'_r} = c_r \qquad (r = 1, 2, \dots \varrho)$$

übergehen und wir somit den einfachen Fall der verborgenen Bewegung von Helmholtz erhalten. Für den Fall also, *daß die linken Seiten von (15) vollständige nach $t$ genommene Differentialquotienten sind, und das kinetische Potential $1^{\text{ter}}$ Ordnung $H$ nicht von $p_1, p_2, \dots p_\varrho$ abhängt, ergibt sich als einziger Fall der verborgenen Bewegung der von* Helmholtz *behandelte, in welchem $\partial H/\partial p'_r = c_r$ ist.*

Für den Fall, daß die Bewegung keine verborgene ist, daß also $p_1, \dots p_\varrho$ im kinetischen Potential enthalten sind, wird die Elimination von $p_1, \dots p_\varrho$ und deren Ableitungen zwischen (15) und (16) auf ein Differentialgleichungssystem in $\pi_s$ führen, dem im allgemeinen kein kinetisches Potential $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung zugehört; es bleibt dann in jedem Falle noch die Frage zu beantworten, ob dieses Eliminationsresultat ein kinetisches Potential $1^{\text{ter}}$ Ordnung hat, was sich nach den bekannten Kriterien für die Existenz kinetischer Potentiale entscheiden läßt[1].

Seien nun im allgemeinen für ein kinetisches Potential $H$ $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung die Lagrangeschen Bewegungssysteme gegeben:

$$(18)\quad \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_r} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_r^{(\nu)}} = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots \varrho)$$

$$(19)\quad \frac{\partial H}{\partial \pi_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \pi'_s} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\nu)}} = \Pi_s \qquad (s = 1, 2, \dots \sigma),$$

und werden zunächst wieder alle kinetischen Potentiale $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung gesucht, für welche die linken Seiten von (18) wieder vollständige nach $t$ genommene Differentialquotienten sind, also

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_r} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_r^{(\nu)}} = \frac{dK_r}{dt} \qquad (r = 1, 2, \dots \varrho)$$

---

[1] Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion $P$ von $\pi_s, \pi'_s, \pi''_s$ ein kinetisches Potential $1^{\text{ter}}$ Ordnung besitzt, ist durch die identisch zu erfüllende Gleichung gegeben:

$$\frac{\partial P}{\partial \pi'_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial \pi''_s} = 0 .$$

ist, so wird, da die linke Seite die Ableitungen von $p_r$ und $\pi_s$ nur bis zur $2\nu^{\text{ten}}$ Ordnung und auch die letzteren nur linear enthält, $K$ nur von $p, p', \ldots p^{(2\nu-1)}, \pi, \pi', \ldots \pi^{(2\nu-1)}$ abhängen. Nimmt man nun an, daß das kinetische Potential $H$ von $p_r, p_r', \ldots p_r^{(\nu-1)}$ $(r=1,2,\ldots\varrho)$ unabhängig, also

$$\frac{\partial H}{\partial p_r}=0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_r'}=0, \ldots \frac{\partial H}{\partial p_r^{(\nu-1)}}=0$$

ist für $r=1,2,\ldots\varrho$, so werden die von den niedrigeren Ableitungen als der $\nu^{\text{ten}}$ von $p_1, p_2, \ldots p_\varrho$ unabhängigen Gleichungen (18) und (19) in

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_r^{(\nu)}}=0 \qquad (r=1,2,\ldots\varrho)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \pi_s'}+\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\nu)}}=\Pi_s \qquad (s=1,2,\ldots\sigma)$$

übergehen. Berechnet man nun aus dem ersten System oder aus

$$\frac{\partial H}{\partial p_r^{(\nu)}}=f_r(t) \qquad (r=1,2,\ldots\varrho),$$

worin $f_r(t)$ eine ganze Funktion von $t$ vom $\nu-1^{\text{ten}}$ Grade mit willkürlichen konstanten Koeffizienten ist

$$p_r^{(\nu)}=\omega_r(t,\pi_1,\ldots\pi_\sigma,\pi_1',\ldots\pi_\sigma',\ldots\pi_1^{(\nu)},\ldots\pi_\sigma^{(\nu)}) \qquad (r=1,2,\ldots\varrho)$$

und setzt diese Werte in das zweite, ebenfalls von den $p, p', \ldots p^{(\nu-1)}$ unabhängige Gleichungssystem ein, so wird sich in der früheren Bezeichnung das Differentialgleichungssystem ergeben:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s}\right)_\omega-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \pi_s'}\right)_\omega+\cdots+(-1)^\nu\left(\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\nu)}}\right)_\omega=(\Pi_s)_\omega \qquad (s=1,2,\ldots\sigma),$$

welches wiederum in $\pi_s$ von der $2\nu^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Nun ist aber für $\lambda=1,2,\ldots\nu$:

$$\frac{\partial(H)_\omega}{\partial \pi_s^{(\lambda)}}=\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\lambda)}}\right)_\omega+\sum_1^\varrho{}_r\left(\frac{\partial H}{\partial p_r^{(\nu)}}\right)_\omega\frac{\partial(p_r^{(\nu)})}{\partial \pi_s^{(\lambda)}}=\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_s^{(\lambda)}}\right)_\omega+\sum_1^\varrho{}_r f_r(t)\frac{\partial(p_r^{(\nu)})}{\partial \pi_s^{(\lambda)}}$$

und somit nach der vorstehenden Gleichung

$$\frac{\partial (H)_\omega}{\partial \pi_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial (H)_\omega}{d\pi_s'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial (H)_\omega}{\partial \pi_s^{(\nu)}} = (\Pi_s)_\omega$$

$$-\left[\sum_1^\varrho {}_r f_r(t)\frac{\partial (p_r^{(\nu)})}{\partial \pi_s} - \frac{d}{dt}\sum_1^\varrho {}_r f_r(t)\frac{\partial (p_r^{(\nu)})}{\partial \pi_s'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\sum_1^\varrho {}_r f_r(t)\frac{\partial (p_r^{(\nu)})}{\partial \pi_s^{(\nu)}}\right],$$

und daher, wenn

$$\mathfrak{H} = (H)_\omega - \sum_1^\varrho {}_r f_r(t)\, p_r^{(\nu)}$$

gesetzt wird, das Differentialgleichungssystem $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung in $\pi_s$:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi_s'} + \cdots + \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \pi_s^{(\nu)}} = (\Pi_s) \qquad (s = 1, 2, \ldots \sigma),$$

welches dem kinetischen Potential $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{H}$ zugehört, und wir finden somit,

*daß, wenn ein* Lagrange*sches Differentialgleichungssystem $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung in $p_1, p_2, \ldots p_\varrho, \pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\sigma$ vorgelegt ist, und einem kinetischen Potential $H$ der $\nu^{\text{ten}}$ Ordnung zugehört, welches von $p_1, \ldots p_\varrho, p_1', \ldots p_\varrho', \ldots p_1^{(\nu-1)}, \ldots p_\varrho^{(\nu-1)}$ unabhängig ist, dann die Elimination der Parameter $p_1, p_2, \ldots p_\varrho$ zwischen den Gleichungen für $\pi_s$ auf ein Differentialgleichungssystem $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung führt, welcher wieder einem kinetischen Potential $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung*

$$\mathfrak{H} = (H)_\omega - \sum_1^\varrho {}_r f_r(t)\, p_r^{(\nu)}$$

*zugehört, worin $f_r(t)$ ganze Funktionen $\nu - 1^{\text{ten}}$ Grades von $t$ mit willkürlichen Konstanten sind.*